Elementarna matematika 2

Racionalne parametrizacije krivulja drugog reda

Racionalne parametrizacije krivulja drugog reda

Promotrimo jediničnu kružnicu. Svaka točka na njoj je oblika $(\cos(t), \sin(t))$ za neki realan broj t, odnosno možemo ju parametrizirati trigonometrijskim funkcijama.

Slično, elipsu

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$$

možemo parametrizirati kao $(\sqrt{a}\cos(t), \sqrt{b}\sin(t))$.

Za hiperbolu

$$x^2 - y^2 = 1$$

trebaju nam hiperbolne funkcije: možemo ju parametrizirati sa $(\cosh(t), \sinh(t))$.

Međutim, postoji i drugačiji način parametriziranja krivulja drugog reda. Na primjer, jedinična kružnica može se parametrizirati kao

$$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right). \tag{1}$$

Takve parametrizacije geometrijskih objekata, u kojoj su funkcije kojima parametriziramo racionalne funkcije (omjeri dvaju polinoma), zovemo *racionalne parametrizacije*. Cilj nam je objasniti kako smo došli do parametrizacije (1), te kako općenito doći do racionalnih parametrizacija krivulja drugog reda.

Promotrimo prvo primjer jedinične kružnice. Ideja je sljedeća. Uzmimo točku $P = (-1, 0)$ s jedinične kružnice. Tada za svaku točku $Q \neq P$ s kružnice postoji jedinstveni pravac koji prolazi kroz P i Q. Time smo uspostavili bijekciju između svih točaka kružnice osim P i svih pravaca kroz P osim tangente na kružnicu kroz P. Ako još tangenti pridružimo točku P, dobivamo bijekciju između točaka kružnice i pravaca kroz P.

Kako je svaki pravac kroz P određen svojim koeficijentom smjera, time je svakom realnom broju pridružena jedinstvena točka na kružnici. Ako koeficijent smjera vertikalnog pravca kroz P dodefiniramo da bude ∞, imamo bijekciju

$$\mathbb{R} \cup \{\infty\} \to \{\text{pravci kroz } P\} \to \{\text{ točke na kružnici }\}.$$

Ovdje je ∞ samo simbol, ali također intuitivno ima smisla govoriti da vertikalni pravci imaju beskonačan koeficijent smjera.

Izračunajmo sada bijekciju koju smo opisali riječima eksplicitno.

Realnom broju t prvo pridružujemo pravac koeficijenta smjera t koji prolazi kroz $P = (-1, 0)$. Taj pravac je $y - 0 = t(x - (-1))$, odnosno $y = tx + t$. Sada tom pravcu pridružujemo presjek Q s jediničnom kružnicom različit od $P = (-1, 0)$. Točke presjeka su one čije x-koordinate zadovoljavaju

$$x^2 + (tx + t)^2 = 1,$$

odnosno

$$(a^2+1)x^2+2a^2x+a^2-1=0.$$

Dobili smo kvadratnu jednadžbu po x, koju možemo riješiti i time dobiti x-koordinatu traženog presjeka. No, možemo i jednostavnije. Naime, znamo jedno rješenje ove kvadratne jednadžbe, to je $x=-1$ (jer je točka $P=(-1,0)$ i na pravcu i na kružnici).

Iz Vietinih formula onda lako čitamo drugo rješenje x_2. Imamo

$$\begin{aligned}(-1)+x_2 &= -\frac{2t^2}{t^2+1},\\ (-1)\cdot x_2 &= \frac{t^2-1}{t^2+1}.\end{aligned}$$

Sada iz bilo koje od ovih jednadžbi (dovoljna je jedna) vidimo $x_2=\frac{1-t^2}{t+t^2}$. To je x-koordinata točke Q. Sada y-koordinatu lako dobijemo iz jednadžbe pravca, i imamo

$$Q(t)=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right).$$

Primijetimo da je ovo upravo parametrizacija (1). Promotrimo još malo dobivene izraze. Primijetimo da točka $P=(-1,0)$ nije oblika $Q(t)$ za $t\in\mathbb{R}$. To je iz razloga što nismo promatrali vertikalni pravac. Uvijek ćemo imati taj "problem" jer nema pripadnog koeficijenta smjera. Međutim, vidimo da kako $t\to\infty$, izraz $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ teži u -1, a izraz $\frac{2t}{1+t^2}$ teži u 0, pa "na limesu" dobivamo točku koja je nedostajala. To će se uvijek događati prilikom primjene ovakvog algoritma, i možete zanemariti tu jednu točku pri rješavanju zadataka.

Iz ovog primjera se lako može izvesti generalni algoritam za konstruiranje racionalne parametrizacije krivulje drugog reda.

1. Nađi neku točku $P=(x_0,y_0)$ na krivulji C.

2. Odredi generalni oblik pravca kroz točku P, to je $y-y_0=t(x-x_0)$.

3. Za svaki $t\in\mathbb{R}$, u jednadžbu za C uvrsti $t(x-x_0)+y_0$ umjesto y i riješi kvadratnu jednadžbu koja se dobije po varijabli x. Ili još bolje, pomoću Vieta formula, znajući da je jedno rješenje jednadžbe $x=x_0$, odredi drugo rješenje x_2.

4. Dobiveni izraz $Q(t)=(x_2,t(x_2-x_0)+y_0)$ koji ovisi o t je tražena racionalna parametrizacija.

5. Identificiramo točke koje nedostaju (one koje odgovaraju vertikalnom pravcu).

Promotrimo još jedan primjer s hiperbolom. Ovdje je kompliciranija situacija zbog fenomena kojeg nema kod kružnica i elipsa: postoje pravci koji nisu tangente na hiperbolu koji ju sijeku točno jednom.

Zadatak. *Odredite neku racionalnu parametrizaciju krivulje*

$$C: x^2+x=y^2-y+2.$$

Rješenje. Prvo nađimo neku točku na krivulji. To je npr. točka $(x_0,y_0)=(1,1)$.

4 Opći oblik pravca kroz $(1,1)$ je $y=tx-t+1$. Uvrstimo sada taj izraz za y u jednadžbu za C, dobivamo:

$$x^2+x=(tx-t+1)^2-tx+t+1+2,$$

odnosno nakon sređivanja to postaje

$$(t^2-1)x^2-(t+1)(2t+1)x+t^2-t+4=0.$$

Za $t = \pm 1$, vidimo da zapravo ne dobivamo kvadratnu jednadžbu, nego samo linearnu jednadžbu, čije jedino rješenje je $x_0 = 1$ (geometrijski, to odgovara pravcima koji sijeku hiperbolu točno jednom a nisu tangente). Za preostale $t \in \mathbb{R}$, dobivamo kvadratnu jednadžbu čije jedno rješenje je 1 jer je P na pravcu, a drugo je

$$x_2 = \frac{t^2 - t + 4}{t^2 - 1}.$$

Uvrštavanjem u $y_2 = t(x_2 - 1) + 1$, dobivamo i y-koordinatu parametrizacije:

$$y_2 = \frac{5t - t^2}{t^2 - 1} + 1 = \frac{5t - 1}{t^2 - 1}.$$

Promotrimo još što se događa za vertikalan pravac $x = 1$ kroz $(1, 1)$. Za njega dobivamo $y^2 - y + 2 = 2$, odnosno $y = 1$ ili $y = 0$, pa neka od točaka $(1, 1)$ ili $(1, 0)$ potencijalno nije u slici parametrizacije.

Direktno vidimo da za $t = 5$ dobivamo točku $(1, 1)$, te da sustav jednadžbi $x_2 = 1$, $y_2 = 0$ nema rješenja, pa je $(1, 0)$ jedina točka koja nije u slici parametrizacije. $\square$

Racionalne točke na krivuljama drugog reda

Jedan od velikih matematičkih problema je određivanje svih racionalnih točaka (točaka s racionalnih koordinatama) na nekoj krivulji, ili ekvivalentno određivanje svih racionalnih rješenja polinomijalnih jednadžbi, ili sustava polinomijalnih jednadžbi. To je općenito dosta težak problem.

Međutim, za krivulje drugog reda situacija je jednostavna. Vratimo se ponovno na našu metodu. Recimo da nam je zadana krivulja drugog reda,tako da su svi koeficijenti u jednadžbu koja ju definira racionalni, te da smo izabrali racionalnu početnu točku P. To je bio slučaj u svim dosadašnjim primjerima.

Promotrimo detaljnije primjer jedinične kružnice. Primijetimo da naša bijekcija

$$t \mapsto (p \ldots y = tx + t) \mapsto \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2}\right)$$

šalje racionalne brojeve t u racionalne točke na kružnici. Obratno, ako uzmemo racionalnu točku na kružnici, koeficijent smjera pravca kroz tu točku i kroz točku P će biti racionalan. To znači da ako restringiramo parametrizaciju na skup racionalnih parametara t dobivamo sve racionalne točke na kružnici.

Za općenitu krivulju drugog reda vrijedi isto (ako su koeficijenti u jednadžbi kojom je zadana racionalni): počevši iz jedne racionalne točke možemo povlačenjem pravaca s racionalnim koeficijentom smjera doći do svih racionalnih točaka.

Naime, ako pravac s racionalnim koeficijentom smjera jednom siječe krivulju drugog reda u racionalnoj točki $P = (x_0, y_0)$, drugi presjek će biti drugo rješenje neke kvadratne jednadžbe s racionalnim koeficijentima koja već ima jednu racionalnu nultočku. Prema Vieta formulama, i druga nultočka je racionalna. Obratno, svaki pravac kroz dvije racionalne točke ima racionalan koeficijent smjera.

Kao posljedicu dobivamo zanimljiv fenomen: krivulja drugog reda ima ili 0 ili beskonačno racionalnih točaka.

Zadatak. *Odredite sve racionalne točke na krivulji $x^2 - 7y^2 = y + 1$.*

Rješenje. Nađimo jednu racionalnu točku. To je na primjer točka $(x_0, y_0) = (-1, 0)$.

Opći oblik pravca kroz (x_0, y_0) s racionalnim koeficijentom smjera je $y = tx + t$. Uvrstimo to u jednadžbu dane hiperbole. Dobivamo

$$x^2 - 7(tx + t)^2 = tx + t + 1,$$

odnosno

$$(1 - 7t^2)x^2 - (t + 14t^2)x - 7t^2 - t - 1 = 0.$$

Jedno rješenje je $x_0 = -1$, a drugo je $x_2 = \frac{7t^2+t+1}{1-7t^2}$. Pripadna y-koordinata je

$$y_2 = t(x_2 + 1) = \frac{t^2 + 2t}{1 - 7t^2}.$$

Primijetimo da ovo sve ima smisla kad god je $7t^2 \neq 1$, odnosno $t \neq \pm\frac{1}{\sqrt{7}}$, što je iracionalno.

Promotrimo još postoje li točke koje nisu obuhvaćene parametrizacijom. To su točke oblika $(-1, y)$, odnosno one koje leže na vertikalnom pravcu kroz $(-1, 0)$. Za $x = -1$, dobivamo

$$1 - 7y^2 = y + 1,$$

odnosno $y \in \{0, -1/7\}$. Zaključujemo da je skup racionalnih točaka dan kao unija

$$\left\{\left(\frac{7a^2 + a + 1}{1 - 7a^2}, \frac{a^2 + 2a}{1 - 7a^2}\right) \mid a \in \mathbb{Q}\right\} \bigcup \left\{(-1, 0), \left(-1, -\frac{1}{7}\right)\right\}.$$

$\square$

Zadatak. *Odredite sve parove racionalnih brojeva (x, y) za koje vrijedi*

$$x^3 + y^3 = 3(x + y).$$

Rješenje. Primijetimo da ovo nije krivulja drugog reda. Međutim, možemo faktorizirati lijevu stranu kao $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$, pa je početna jednadžba ekvivalentna s

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2 - 3) = 0.$$

Onda je ili $x = -y$, ili je

$$x^2 - xy + y^2 = 3.$$

Preostaje odrediti racionalne točke na dobivenoj krivulji drugog reda.

Primijetimo da je $P = (1, -1)$ jedna racionalna točka na krivulji. Opći oblik pravca kroz P je $y = tx - t - 1$. Uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo da je presjek pravca i krivulje dan s

$$x^2 - x(tx - t - 1) + (tx - t - 1)^2 = 3.$$

Nakon sređivanja, dobivamo

$$(t^2 - t + 1)x^2 - (t + 1)x + t^2 + 2t - 2 = 0.$$

Jedno rješenje je $x_0 = 1$, a drugo je prema Vieta formulama

$$x_2 = \frac{t^2 + 2t - 2}{t^2 - t + 1}.$$

Pripadna y-koordinata je

$$y_2 = tx_2 - t - 1 = \frac{2t^2 - 2t - 1}{t^2 - t + 1}.$$

Primijetimo da ovo sve ima smisla, jer je $t^2 - t + 1 \neq 0$ za $t \in \mathbb{R}$, odnosno nigdje ne dijelimo s nulom.

Preostaje još provjeriti vertikalni pravac $y = -1$. Za $y = -1$ dobivamo $x^2 + x + 1 = 3$, odnosno $x = 1$ ili $x = -2$, pa moramo dodati točku $(-2, -1)$.

Dakle, skup svih parova racionalnih brojeva za koje je zadovoljena početna jednadžba je

$$\left\{ \left(\frac{t^2 + 2t - 2}{t^2 - t + 1}, \frac{2t^2 - 2t - 1}{t^2 - t + 1} \right) \mid t \in \mathbb{Q} \right\} \bigcup \{(-2, -1)\} \bigcup \{(t, -t) \mid t \in \mathbb{Q}\}.$$

$\square$